数理解析研究所講究録
696巻 1989年 179-193

バナッハ空間における線形ボルテラ積分－微分方程式の適切性とレゾルベント作用素

都立商科短大　鶴田邦夫（ Kunio Tsuruta ）

1. はじめに

バナッハ空間X上の初期値問題

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)\,ds + f(t), \quad u(0) = x, \tag{1}$$

を考えよう。関数 $u: J=[0,a] \to X$ が(1)の解とは u が J上で連続微分可能な関数で $u(t) \in D(A)$, $Au(t) \in C(J;X)$ であり、 u がJ上で(1) を満たす場合をいう。(1) の解の存在性と方程式の適切性については大勢の人達によりAとBに関する様々な条件の下で研究されてきた（[1-4], [7-8]）。これらの大部分は(1) のレゾルベント作用素Rの存在を示すことにより(1)の適切性を示した。この作用素が存在すれば(1)の解 u は $u(t) = R(t)x + \int_0^t R(t-s)f(s)\,ds$ と表されるので、この「定数変化の公式」から(1)の適切性が導かれるのである。しかし逆の問題、すなわち(1)の適切性はレゾルベント作用素の存在を保証するかということは積分方程式の場合には従来あまり扱われてこなかった。Aが C_0－半群の生成作用素で、$Bx=$

$B(\cdot)x$ が $x\in D(A)$ のとき C^1 クラスに属し $t\geq 0$ のとき $B(t)D(A^2)\subset D(A)$ を満たす場合にこの問題は [7] で肯定的に答えられた。後に Grimmer と Prüss [4] により以下で述べる条件 (H_0) の下でレゾルベント作用素の存在と(1)の斉次型（すなわち $f=0$ の場合）の適切性とは同値であることが示され、Krein により得られた微分方程式のものと似た形となり理論的にすっきりした。とはいえ彼等の証明の中に一部曖昧な所があるように思われるので2節でより完全な証明を与えた。

作用素 A がレゾルベント作用素 R により $A=R'(0)$ と表されることは $B=0$ の場合によく知られているが、方程式(1)の場合でも成り立つことはラプラス変換を使って [4] で証明されているが、ここではもっと一般的な場合で成り立つことを別の方法で示す。

ラプラス変換は微分方程式の研究においては欠かせない道具であり、C_0-半群の理論でのヒレ-吉田の定理は大変有名であるが、[2] では $B(t)=b(t)A$ という特別な場合に、[4] ではより一般的な場合に、レゾルベント作用素が存在する必要十分条件を与える同様の定理がえられた。実際に応用する場合には、定理の条件の成立を確認することは、半群理論の場合のようには易しいことではないが、[4] で示されたように $u'=Au$ が適切でない問題でも積分項 $B*u$ が挿入されると適切

な問題になる例が存在するので、摂動法だけでは方程式(1)は扱えないという意味でもボルテラ型積分方程式論においては理論的に重要な定理である。3節では[4]での証明を部分的に手直ししたものを与えよう。

(1)の解の存在性に関する最初の結果はMiller [7]により与えられた。彼が扱ったのは A が C_0-半群を生成し $B(t)=b(t)A$ かつ b はスカラー値関数で $b\in L^1_{loc}(R^+)$ の場合である。[2]での結果では B に関する仮定が弱められていて「各 $x\in D(A)$ に対し $Bx\in W^{1,1}_{loc}(R^+)$」となっている。Grimmer とPrüss [4]はさらにこれを拡張し「A が C_0-半群を生成し Bx がすべての $x\in D(A)$ に対し有界変動関数であるならばレゾルベント作用素は存在する」という結果を得た。同時に彼らは、Bx が『ほとんど』強有界変動関数であるがレゾルベント作用素は存在しない例を与えることが出来るので、この条件は『ほとんど best possible』であると主張している。彼らの方法では A^{-1} の存在を仮定するので、本質的には $B(t)=K(t)A$ かつ関数 Kx, $x\in X$, は有界変動関数である場合に帰着される。4節ではこの型で A^{-1} の存在を仮定しなくても同じ結果が得られることを示し、また必ずしもこの型にならない場合にも「A が C_0-半群を生成し B がバナッハ空間 $Y=D(A)$ から X への有界線形作用素値関数として半-強有界変動関数であるならばレゾルベント作用

素は存在する」という結果を、[8] で使われたものと同じ方法でレゾルベント作用素を構成することにより示す。

2. レゾルベント作用素と適切性

この論文を通して A は X で稠密に定義された閉線形作用素とし、$B=\{B(t) : t\geq 0\}$ は閉線形作用素値関数とし次の条件を満たすものとする。

(H_0) すべての $t\geq 0$ に対し $D(B(t))\supset D(A)$；各 $x\in D(A)$ に対し Bx は強可測関数であり、スカラー値関数 $b\in L^1_{loc}(R^+)$ が存在して $\|B(t)x\|\leq b(t)(\|x\|+\|Ax\|)$ が成り立つ。

ここでバナッハ空間 $Y=D(A)$ を導入する。ノルムは A のグラフノルムとする。すなわち $|x|_Y=\|x\|+\|Ax\|$。

<u>定義 1</u> 次の (R1)-(R3) を満たす有界線形作用素値関数 $R=\{R(t) : t\geq 0\}$ を方程式 (1) のレゾルベント作用素と呼ぶ。

(R1) $R(0)=I$；各 $x\in X$ に対し Rx は連続関数である。

(R2) $R(t)D(A)\subset D(A)$, $t\geq 0$；各 $x\in D(A)$ に対し、関数 $ARx=AR(\cdot)x$ は連続関数で Rx は R^+ 上連続微分可能な関数である。

(R3) すべての $x\in D(A)$ と $t\geq 0$ に対し R は次のレゾルベント方程式を満たす。

$$R'(t)x=AR(t)x+\int_0^t B(t-s)R(s)x\,ds, \tag{2}$$

$$R'(t)x=R(t)Ax+\int_0^t R(t-s)B(s)x\,ds. \tag{3}$$

命題１　方程式(1)がレゾルベント作用素 R を持てば各 t につき $R(t)$ は Y 上の有界線形作用素である。

定義２　有界線形作用素値関数 $R=\{R(t):t\geq 0\}$ が(R1)と(R3)の(3)を満たすならば R を方程式(1)のL－レゾルベント作用素と呼ぶ。

各 $u\in C^1(R_+;X)\cap C(R_+;Y)$ に対し $(Du)(t)=u'(t)-Au(t)-\int_0^t B(t-s)u(s)\,ds$ と置く。

命題２　(1)がL－レゾルベント作用素 R を持つと仮定し、$u\in C^1(R_+;X)\cap C(R_+;Y)$ とする。このとき

$$u(t)=R(t)u(0)+\int_0^t R(t-s)(Du)(s)\,ds,\quad t\geq 0 \tag{4}$$

が成り立つ。逆に強連続な有界線形作用素値関数 $R=\{R(t):t\geq 0\}$ が任意の $u\in C^1(R_+;X)\cap C(R_+;Y)$ に対し(4)を満たすならば R は(1)のL－レゾルベント作用素である。

この命題を使えば(1)のレゾルベント作用素は高々一つであることが分かるし、「定数変化の公式」も簡単に導かれる。

定理１　R を(1)のL－レゾルベント作用素とし、$f\in C(J;X)$, $x\in X$, とする。もしも u が(1)の J 上の解ならば

$$u(t)=R(t)x+\int_0^t R(t-s)f(s)\,ds,\qquad t\in J. \tag{5}$$

式(5)の右辺で定義される関数 u がどのような初期データ (x,f) に対して実際に(1)の解になるのかという問題に対しても、半群の場合と類似の結果が成り立つことが知られている

。ここでは新しい有界線形作用素値関数を導入しこの問題に答えてみよう。

<u>定義 3</u>　有界線形作用素値関数 $R=\{R(t): t\geq 0\}$ が (R1), (R2), (2) を満たすならば R を方程式 (1) の R−レゾルベント作用素と呼ぶ。

以下 $R_S(t)x=\int_0^t R(s)x\,ds$ と置く。R が L−レゾルベント作用素ならば R_S は方程式

$$R(t)x-x=R_S(t)Ax+\int_0^t R_S(t-s)B(s)x\,ds \tag{6}$$

を満たす。また，記述を簡単にするため次の記号を使う。

$(R*f)(t)=\int_0^t R(t-s)f(s)\,ds$；　$f_S=I*f$.

<u>補題 1</u>　R を (1) の R−レゾルベント作用素とすれば，各 $t\geq 0$ に対し $R_S(t)X\subset D(A)$ であり $AR_Sx=AR_S(\cdot)x$ は各 $x\in X$ に対し連続関数である。また R_S は $t\geq 0$, $x\in X$ に対し次の方程式を満たす。

$$R(t)x-x=AR_S(t)x+\int_0^t B(t-s)R_S(s)x\,ds. \tag{7}$$

更に $f\in C(J;X)$ に対し $h=R_S*f$ は (1) で f の代わりに f_S とした方程式の解である。

<u>証明</u>　$x\in D(A)$ のとき (2) を積分し (7) を得る。(H_0) により

$$|R_S(t)x|_Y\leq\|R_S(t)x\|+\|R(t)x-x\|+\int_0^t b(t-s)|R_S(s)x|_Y\,ds$$

と評価出来るので不等式

$$\|AR_S(t)x\|\leq\|R(t)x-x\|+\int_0^t r_b(t-s)(\|R_S(s)x\|+\|R(s)x-x\|)ds$$

が得られる。これを使えば前半の結論がすべて導かれる。また $h \in C^1(R^+;X) \cap C(R^+;Y)$ であることが簡単に分かるし、フビニの定理が使え、(7)より

$$h' - Ah - B*h - f_S = I*(R - AR_S - B*R_S - I)*f = 0. \qquad \square$$

<u>定理2</u>　$f \in C(J;X)$ とし、$g = R*f$ と置く。Rが(1)の R−レゾルベント作用素ならば次の三つの命題は同値である。

(i) g は(1)の解。(ii) $g \in C(J;Y)$。(iii) $g \in C^1(J;X)$。

<u>証明</u>　(ii)ならば(i)であることだけを示す。補題1によれば g は $g_S = R_S*f$ と $g = Ag_S + B*g_S + f_S$ を満たし，$g \in C(J;Y)$ であるから $g = I*(Ag + B*g + f)$ である。よって $g \in C^1(J;X)$ かつ(1)が成り立つことが分かる。 $\square$

<u>系1</u>　$x \in D(A)$とする。もしも RがR−レゾルベント作用素ならば $f \in W^{1,1}(J;X)$ のとき uは(1)の解である。もしもRが(1)のレゾルベント作用素ならば $f \in C(J;X) \cap L^1(J;Y)$ のとき uは(1)の解である。

<u>定義4</u>　Φを $C(R^+;X)$の部分集合とする。このとき L−レゾルベント作用素RがΦで消約律を満たすとは，$f \in \Phi$ に対し $R*f = 0$ ならば $f = 0$ が必ず導かれるときをいう。

<u>定理3</u>　方程式(1)がレゾルベント作用素Rを持つ必要十分条件は(1)が $C(R^+;X)$ で消約律を満たしすべての $x \in D(A)$ に対し $Rx \in C(R^+;Y)$ である L−レゾルベント作用素Rを持つことで

ある。

<u>証明</u>　$f\in C(R^+;X)$ に対し $R*f=0$ とする。$g=R*f_S$ と置けば、$g=0$，$g=R_S*f$ である。また補題1により $Dg=f_S$ だから $f_S=0$ つまり $f=0$ となる。逆に、各 $x\in D(A)$ に対し $u=Rx\in C^1(R^+;X)\cap C(R^+;Y)$ であるから $f=Du$ と置くと定理1により $u=Rx+R*f$ が導かれる。すなわち $R*f=0$ でありRが消約律を満たすから $f=0$ となる。□

<u>定理4</u>　方程式(1)がレゾルベント作用素Rを持てば $D(A)=\{x\in X: Ax=\lim_{h\to 0+}h^{-1}(R(h)x-x)$ が存在$\}$ かつ $Ax=\lim_{h\to 0+}h^{-1}(R(h)x-x)$，$x\in D(A)$。

<u>証明</u>　$D(C)=\{x\in X: Cx=\lim_{h\to 0+}h^{-1}(R(h)x-x)$ が存在$\}$ と置き、$x\in D(C)$ とする。任意に与えられた $\eta>0$ に対し $\|R_S(s)x\|\leqq sM\|x\|$ かつ $\|R(s)x-x-sCx\|<s\eta$，$s\in[0,\varepsilon]$ となる $\varepsilon>0$ と $M>0$ が存在する。よって(7)と(8)より

$$\begin{aligned}\|AR_S(t)x-(R(t)x-x)\| &\leqq \int_0^t b(t-s)|R_S(s)x|_Y\,ds\\ &\leqq \int_0^t r_b(t-s)(\|R_S(s)x\|+\|R(s)x-x\|)\,ds\\ &\leqq t(M\|x\|+\eta+\|Cx\|)\int_0^t r_b(s)\,ds\end{aligned}$$

と評価できるから、$Cx=\lim_{h\to 0+}Ah^{-1}R_S(h)x$ である。これより $x\in D(A)$ かつ $Ax=Cx$ すなわち $D(C)\subset D(A)$ がいえる。逆の包含関係は明らかであるから $A=C$ が成り立つ。□

次にレゾルベント作用素Rが存在することと斉次方程式

$$u'(t) = Au(t) + \int_0^t B(t-s)u(s)\,ds \tag{8}$$

の適切性とが同値であることを示そう。

<u>定義 5</u>　もしも $x \in D(A)$ ならば方程式(8)が $u(0;x)=x$ である一意的な解 $u=u(t;x)$ を持ち、$\{x_n\} \subset D(A)$, $x_n \to 0$ ならば有界区間上一様に $u(t;x_n) \to 0$ となるなら方程式(8)は適切である、という。

<u>定理 5</u>　方程式(1)がレゾルベント作用素Rを持つ必要十分条件は(8)が適切であることである。

<u>証明</u>　必要条件は明らかであろう。(8)が適切であったとし各 $x \in D(A)$ に対し $R(t)x = u(t;x)$ と定義すれば、[5] で示されたようにRはR-レゾルベント作用素であることが分かる。次に u を $C^1(R_+;X) \cap C(R_+;Y)$ の任意の要素とし、$g = I*u$, $f = u(0) + I*Du$ と置く。g は(1)を満たすが一方 $f \in C^1(R_+;X)$ であるから定理1により関数 $R*f$ も(1)を満たす。よって $\int_0^t u(s)\,ds = \int_0^t R(s)(u(0) + \int_0^{t-s}(Du)(r)\,dr)\,ds$ が成り立つので両辺を微分すれば(3)が得られる。　□

3.　ヒレ-吉田型定理

以下では $\Phi = C(R_+;X) \cap \{f : f$ はラプラス変換可能$\}$ とし、(H_0) の他に次の条件をも仮定する。

(H_1)　$b(t) \cdot e^{-\beta t} \in L^1(R_+)$ となる実数 β が存在する。

これは B が $\mathrm{Re}\lambda \geq \beta$ のとき絶対収束するラプラス変換 $\hat{B}(\lambda)$ を持つことを示す。更に次の条件を導入する。

(R4)　$\|R(t)\| \leqq M\exp(\omega_0 t)$, $t \geqq 0$, となる定数 $M \geqq 1$ と ω_0 が存在する。

<u>補題 2</u>　(H0)、(H1) が成り立つとき，R が条件 (R4) を満たすレゾルベント作用素である必要十分条件は、R が (R4) と Φ で消約律を満たす L-レゾルベント作用素であり、$R_S(t)X \subset D(A)$, $t \geqq 0$，$AR_S x$, $x \in X$，は絶対収束するラプラス変換を持つことである。

<u>定理 6</u>　(H0)，(H1) が成り立つとする。このとき (R4) を満たすレゾルベント作用素 R が存在する必要十分条件は次の様な定数 $\omega > \beta$ と $M \geqq 1$ が存在することである：$\mathrm{Re}\lambda > \beta$ のとき $(\lambda - A - \hat{B}(\lambda))$ は $D(A)$ を定義域とする閉作用素で可逆、$H(\lambda) = (\lambda - A - \hat{B}(\lambda))^{-1}$ は $\|(n!)^{-1} H^{(n)}(\lambda)\| \leqq M(\mathrm{Re}\lambda - \omega)^{-(n+1)}$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega$, $n \in \mathbb{N}_0$，を満たす。

<u>証明</u>　十分条件だけを証明する。[5] の定理 8 の証明の (i) − (iii) によれば条件 (R4) を満たす L-レゾルベント作用素 R が存在することが分かる。このとき $\hat{R}(\lambda) = H(\lambda)$，$\mathrm{Re}\lambda > \omega$ である。$f \in \Phi$, $R * f = 0$ とする。ある $\omega_1 > \omega$ に対し $H(\lambda)\hat{f}(\lambda) = 0$, $\mathrm{Re}\lambda > \omega_1$ であるから、$\hat{f}(\lambda) = (\lambda - A - \hat{B}(\lambda))H(\lambda)\hat{f}(\lambda) = 0$ すなわち $f = 0$。従って R は Φ で消約律を満たす。関数 $H(\lambda)$ は方程式 $AH(\lambda)x = \lambda H(\lambda)x - x - \hat{B}(\lambda)H(\lambda)x$, $x \in X$, を満たすから $|H(\lambda)x|_Y \leqq M_2\|x\|$，$\lambda > \omega_2$ となる定数 M_2 と ω_2 が存在し，十分に大きな λ に対し $\|\hat{B}(\lambda)H(\lambda)\|$

<1 であることが分かる。従って $(\lambda-A)=(I+\hat{B}(\lambda)H(\lambda))(\lambda-A-\hat{B}(\lambda))$ により $\rho(A)\neq\phi$ である。そこで $K(t)=B(t)(\lambda_0-A)^{-1}$, $\lambda_0\in\rho(A)$, と置く。このとき $\|K(t)\|\leq k(t)e^{\beta t}$ となる $k\in L^1(R_+)$ が存在するから $\int_0^\infty k(t)e^{-(\sigma-\omega)t}dt<1$ となるように $\sigma>\omega$ を十分に大きく取り $K_\sigma(t)=e^{-\sigma t}K(t)$ と置く。積分方程式 $u(t)-(K_\sigma*u)(t)=e^{-\sigma t}(R(t)x-x-\lambda_0(K*R_S)(t)x)$ は各 $x\in X$ に対し一意的な連続解 $u\in L^1(R_+;X)$ を持つ。更に、$\mathrm{Re}\lambda>0$ のとき $\|\hat{K}(\lambda+\sigma)\|<1$ であるから上式より $\hat{u}(\lambda)=(\lambda+\sigma)^{-1}AH(\lambda+\sigma)x$ が得られる。よって $(\lambda_0-A)^{-1}u(t)=\lambda_0(\lambda_0-A)^{-1}e^{-\sigma t}R_S(t)x-e^{-\sigma t}R_S(t)x$ となる。故に $R_S(t)X\subset D(A)$, $AR_S(t)x=e^{\sigma t}u(t)$ となるから補題2より R はレゾルベント作用素である。 □

4. レゾルベント作用素の存在と摂動法

この節では方程式

$$u'(t)=Au(t)+\int_0^t B(t-s)u(s)\,ds+\int_0^t C(t-s)u(s)\,ds \qquad (9)$$

を摂動法により扱う。次の定理は [8] の拡張である。

定理7　B と C は (H_1) を満たすとする。このとき次の二つの命題は同値である。

(i)　(1) のレゾルベント作用素 T が存在し、各 $t\geq 0$ に対し

(H3)　$\sup\{\|\int_0^t C(t-s)T(s)x\,ds\|;\ x\in D(A),\ \|x\|\leq 1\}<\infty$.

(ii)　(9) のレゾルベント作用素 R が存在し、各 $t\geq 0$ に対し

(H4)　$\sup\{\|\int_0^t C(t-s)R(s)x\,ds\|;\ x\in D(A),\ \|x\|\leq 1\}<\infty$.

証明　(i) ならば(ii) が成立することを示す。各 $x\in D(A)$ に対し $F(t)x=\int_0^t C(t-s)T(s)x\,ds$ と置けば、すべての $t\geq 0$ に対し $F(t)$ は有界線形作用素 $F(t)$ に閉拡張され、$Fx\in C(R_+;X)$, $x\in X$, である。このとき $u\in C^1(R_+;X)\cap C(R_+;Y)$ に対し

$$\int_0^t C(t-s)u(s)\,ds = F(t)u(0)+\int_0^t F(t-s)(Du)(s)\,ds \tag{10}$$

が成り立つ。ここで R_F を F に付随した積分レゾルベント作用素すなわち $R_Fx-Fx=F*R_Fx=R_F*Fx$ とし $Rx=Tx+T*R_Fx$, $x\in X$, と定義する。R は $Rx=Tx+R*Fx$ を満たす。従って定理１から $R*(u'-Au-B*u-C*u)=T*(Du)+R*F*(Du)-R*C*u=u-Tu(0)-R*Fu(0)=u-Ru(0)$。次に $f\in C(R_+;X)$, $R*f=0$ と仮定すると $T*(f+R_F*f)=0$ が得られるが、T が消約律を満たすので $f+R_F*f=0$ となる。よって $f=0$ が導かれる。従って R も消約律を満たす。$x\in D(A)$ ならば、R が L-レゾルベント作用素であるので $Rx\in C^1(R_+;X)$ であるから、定理４を適用すれば $Rx\in C(R_+;Y)$ であることが分かるが、定理５により R は方程式(9)のレゾルベント作用素である。最後に (10) で $u=Rx$, $x\in D(A)$, と置けば $C*Rx=Fx+R_F*Fx=R_Fx$ となるので、R が (H_4) を満たすことが分かる。 □

系２　A は C_0-半群 T の生成作用素で、B がすべての $t\geq 0$ に対し $D(B(t))\supset D(A)$ であり $B(0)\in B(Y;X)$, 各有界区間 $J=[a,b]$ に対し $B:J\to B(Y;X)$ は半有界変動（[5] を見よ）であれば(1)

にはレゾルベント作用素が存在する。

(9) で $B(t)=K_1(t)A$, $C(t)=K_2(t)A$ である場合を次に考える。[4] の定理9の一つの拡張となる。$K=K_1+K_2$ と置く。

<u>定理 8</u> 各 $i=1,2$ に対し、K_i は有界線形作用素値関数とし、$x\in X$ に対し K_ix は強可測関数で $\|K_i(t)\|\leqq b_i(t)$, a.e. t となる関数 $b_i\in L^1_{loc}(R_+)$ が存在すると仮定する。さらに K_2x, $x\in X$, は有界変動関数とする。このとき(1)がレゾルベント作用素 T を持つ必要十分条件は(9)がレゾルベント作用素 R を持つことである。

<u>証明</u> 定理6と同様に必要条件を示せば十分である。$Wx=T*K_2x$ と定義すれば任意の有界区間の上で W は作用素ノルムで有界変動関数である ([4] を見よ)。このとき各 $x\in X$ に対しボルテラ-スチィルチェス方程式 $Ux=Tx-x+dW*Ux-K*Ux$ は一意的な強連続な有界線形作用素値関数 U を解に持つ ([5] を見よ)。そこで $Rx=Tx+dW*Ux$, $x\in X$, と定義すると $Rx=x+Ux+K*Ux$ であることはすぐに分かる。u を $C(J;X)\cap C(J;Y)$ の任意の関数とし, $Lu=Du-C*u$ と置き $v=I*Au-U*Lu$ とすれば, 定理2から $v=I*(Au+Lu)-T*Lu-dW*U*Lu+K*U*Lu=Tu(0)-u(0)+dW*v-K*v$。よって解の一意性により

$$U(t)u(0)+\int_0^t U(t-s)(Lu)(s)\,ds=\int_0^t Au(s)\,ds \tag{11}$$

が成り立つ。このとき $u-Ru(0)=u-u(0)-Uu(0)-K*Uu(0)=$

$I*Lu+U*Lu+K*U*Lu+I*(u'-Au-K*Au-Lu)=R*Lu$ が得られる。さて(11)で $u(t)=x$, $x\in D(A)$, と置くと, $Ux=I*(UAx+U*KAx+Ax)$ が得られるから, Ux は連続微分可能であり従って $Rx=Tx+T*(K_2*U'x)$ となる。命題2を適用すれば $R(t)x\in D(A)$, $x\in D(A)$, かつ $R'x=ARx+B*Rx+K_2*U'x$ が成り立つ。一方 $R'x=U'x+K*U'x$ でもあるから両辺を比較して $U'x+K_1*U'x=ARx+K_1*ARx$ が得られるが, 解の一意性により $U'x=ARx$ であるからRは(9)のレゾルベント作用素である。 □

参考文献

1. G. Da Prato and M. Iannelli, Linear integro-differential equations in Banach spaces, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 62 (1980), 207-219
2. W. Desch, R. Grimmer and W. Schappacher, Some considerations for integrodifferential equations, J. Math. Anal. Appl. 104 (1984), 219-234
3. R. Grimmer, Resolvent operators for integral equations in a Banach space, Trans. Am. Math. Soc. 273 (1982), 333-349
4. R. Grimmer and J. Prüss, On linear Volterra equations in Banach spaces, Comp. Maths. Appls. 11 (1985), 189-205

5. C. S. Hönig, Volterra Stieltjes-Integral Equations, North-Holland, New York, 1975

6. S. G. Krein, Linear Differential Equations in Banach Space, A. M. S., Providence, Rhode Island (1971)

7. R. K. Miller, Volterra integral equations in a Banach space, Funkcial. Ekvac. 18 (1975), 163-193

8. K. Tsuruta, Regularity of solutions to an abstract inhomogeneous linear integrodifferential equations, Math. Japonica 26 (1981), 65-76